Exercice 1 (4 points)

Cet exercice **Vrai-Faux** comporte 4 affirmations.
Pour chaque affirmation le candidat doit donner son appréciation:

- dans le cas **Vrai,** une brève justification sera donnée
- dans le cas **Faux,** on expliquera brièvement pourquoi **et** on donnera l'énoncé correct.

Pour chaque affirmation, une appréciation **Vrai** ou **Faux** correcte rapporte 0,5 point, une appréciation incorrecte ne rapporte ni n'enlève aucun point, la justification avec la correction éventuelle rapporte 0,5 point.

Affirmation 1 Pour tout $x \in \mathbf{R}$: $e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$

Affirmation 2 Pour tout $z \in \mathbf{C}$: $|-2z| = -2 \times |z|$

Affirmation 3 La valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto \sin x$ sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ est $m = \frac{3}{2\pi}$

Affirmation 4 Une primitive de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sin^2 x}$ sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$ est la fonction $F : x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}$

Exercice 2 (4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, unité 1 cm.
1) Dessiner les points A, B, C d'affixes respectifs $z_A = -\sqrt{3} - i$, $z_B = \sqrt{3} - i$, $z_C = 2i$.
2) Calculer la forme algébrique et la forme exponentielle de $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$
3) Justifier la relation:

$$\arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) \pmod{2\pi}$$

4) Calculer $\frac{CB}{CA}$, Quelle est la nature du triangle ABC ?

Exercice 3 (4 points)

1) a) Donner la forme exponentielle de $z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

b) Donner la forme algébrique de $z_2 = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

2) a) Calculer la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}\cdot$

b) Calculer la forme exponentielle de $\frac{z_1}{z_2}\cdot$

3) Déduire des résultats de la question 2 les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}\cdot$

4) a) Pour $x \in \mathbf{R}$, donner la forme exponentielle de $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

b) En utilisant les propriétés de la notation exponentielle, en déduire une transformation des expressions $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

c) Donner alors les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et de $\sin\frac{7\pi}{12}$ en remarquant que $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}$

Exercice 4 (4 points)

1) Calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{e^x+1}$ et en déduire son tableau de variation sur $[0;1]$. Donner alors un encadrement de $f(x)$ sur $[0;1]$.

2) On considère l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{1}{e^x+1}dx$$

qu'on ne cherchera pas à calculer dans cette question. Déduire de la question 1 un encadrement de l'intégrale I.

3) On considère l'intégrale

$$K = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$$

a) Calculer K.

b) Calculer $I + K$.

c) En déduire la valeur exacte de I.

Exercice 5 (4 points)

On admettra que le tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$ sur $[0; +\infty[$ est le suivant:

x	0		$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$	0

On y lit aussi la limite de f en $+\infty$.

1) Pour $n \in \mathbf{N}^*$ on pose $u_n = \int_n^{n+1} f(x)\,dx$, on ne cherchera pas à calculer cette intégrale.

a) Pour $x \in [n; n+1]$, ranger dans l'ordre croissant les nombres réels $f(x), f(n), f(n+1)$ et en déduire que:

$$(1) \qquad f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$$

b) En déduire la limite de u_n en $+\infty$.

2) Pour $n \in \mathbf{N}^*$ on pose $I_n = \int_1^n f(x)\,dx$, on ne cherchera pas à calculer cette intégrale

a) Pour $n \in \mathbf{N}^*$ justifier l'inégalité:

$$(2) \qquad \int_1^n e^{-x^2} dx \leq \int_1^n xe^{-x^2} dx$$

b) Calculer la valeur exacte de l'intégrale:

$$\int_1^n xe^{-x^2} dx$$

c) Déduire des questions 2a et 2b que la suite (I_n) est majorée.

3) a) Pour $n \in \mathbf{N}^*$ montrer que:

$$(3) \qquad I_{n+1} = I_n + u_n$$

b) Démontrer que la suite (I_n) est convergente, on ne demande pas la limite de cette suite.